

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: (8,7), (4,5), (8,5) ja (4,7).

Lahendus:

Teisendame võrrandi $x(x - 12) - y(y - 12) = 3$:

$$\begin{aligned}x(x - 12) - y(y - 12) &= x^2 - 12x - y^2 + 12y = x^2 - y^2 - 12x + 12y \\ &= (x - y)(x + y) - 12(x - y) = (x - y)(x + y - 12)\end{aligned}$$

Saame võrrandi

$$(x - y)(x + y - 12) = 3$$

Kuna otsitavad x ja y on täisarvud, siis ka $x - y$ ja $x + y - 12$ on ka täisarvud. Et nende korrutis on võrdne 3-ga, siis on võimalikud 4 juhtu:

- 1) $x - y = 1$, $x + y - 12 = 3$, millest järeldub, et $x = 8$ ja $y = 7$
- 2) $x - y = -1$, $x + y - 12 = -3$, millest järeldub, et $x = 4$ ja $y = 5$
- 3) $x - y = 3$, $x + y - 12 = 1$, millest järeldub, et $x = 8$ ja $y = 5$
- 4) $x - y = -3$, $x + y - 12 = -1$, millest järeldub, et $x = 4$ ja $y = 7$

Vastus: Sobivad täisarvude paarid on (8,7), (4,5), (8,5) ja (4,7).

Hindamine:

Teisendatud võrrand kujule $(x - y)(x + y - 12) = 3$: 4p

Järeldatud, et kuna x ja y on täisarvud, siis ka $x - y$ ja $x + y - 12$ on täisarvud: 1p

Leitud saadud kuju kasutades kõik õiged vastused: 2p

7p

Ainult õige vastuse eest anda 2p

2. Vastus: $k = -\frac{2}{3}$

Lahendus:

Olgu üheks lahendiks a , siis teiseks lahendiks on $4a$

Teisendame võrrandi:

$$(k^2 + k - 2)x^2 + (5 - 5k)x - 5 = 0$$

Viete'i teoreemi järgi:

$$\begin{cases} 5a = \frac{5k - 5}{k^2 + k - 2} \\ 4a^2 = \frac{-5}{k^2 + k - 2} \end{cases}$$

esimesest võrrandist avaldame a :

$$a = \frac{k - 1}{k^2 + k - 2}$$

Järelikult:

$$4a^2 = \frac{4k^2 - 8k + 4}{(k^2 + k - 2)^2}$$

Saame võrrandi:

$$\frac{4k^2 - 8k + 4}{(k^2 + k - 2)^2} = \frac{-5}{k^2 + k - 2}$$

$$\frac{4k^2 - 8k + 4 + 5(k^2 + k - 2)}{(k^2 + k - 2)^2} = 0$$

$$\frac{9k^2 - 3k - 6}{(k^2 + k - 2)^2} = 0$$

$$9k^2 - 3k - 6 = 0 \text{ ja } k^2 + k - 2 \neq 0, \text{ kust } k \neq 1; k \neq -2$$

Ruutvõrrandi $9k^2 - 3k - 6 = 0$ lahendades saame $k_1 = 1$; $k_2 = -\frac{2}{3}$, millest $k_1 = 1$ ei sobi, ehk ainuke sobiv k väärtus on $-\frac{2}{3}$.

Hindamine:

Süsteemi koostamine Viete'i teoreemi järgi 3p

a avaldamine ning murdvõrrandi koostamine 1p

$k_1 = 1; k_2 = -\frac{2}{3}$ leidmine 2p

$k_1 = 1$ mittesobivus 1p

7p

3. Vastus: 58%

Lahendus:

Olgu 1.rühmas x õpilast, 2.rühmas y õpilast

Kuna õpilased, kes kuuluvad esimesse ja teise rühma moodustavad 40% esimese rühma õpilastest ja 30% teise rühma õpilastest, saame võrduse:

$$0.4x = 0.3y, \text{ millest } x = 0.75y.$$

Seega, õpilaste arv, kes kuuluvad kas esimesse või teise rühma (või mõlemasse)

$$x + y - 0.3y = 1.45y$$

Kuna nad moodustavad 58% kogu õpilastest, saame teada, et kokku on $2,5y$ õpilast.

Kõik õpilased, kes ei kuulu ei esimesse ega teise rühma (kokku 42% kogu õpilastest), kuuluvad kolmandasse rühma, neid on $2,5y \cdot 0,42 = 1,05y$

Lisaks kuuluvad sinna õpilased, kes kuuluvad esimesse ja kolmandasse rühma,

$$\text{neid on } \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} \cdot 0,75y = 0,25y$$

ja õpilased, kes kuuluvad teise ja kolmandasse rühma, neid on $0,15y$.

$$\text{Kokku 3.rühmas on } 1,05y + 0,25y + 0,15y = 1,45y$$

Leiame, mitu protsenti nad moodustavad õpilaste arvust: $\frac{1,45y}{2,5y} = 0,58$, ehk 58%.

Hindamine:

| | |
|---|-----------|
| Leitud võrrand $0.4x = 0.3y$ ja sealt avaldatud x (või y) | 1p |
| Avaldatud õpilaste arv, kes kuuluvad kas esimesse või teise rühma | 2p |
| Avaldatud, mitu õpilast kokku on | 1p |
| Avaldatud õpilaste arv, kes kuuluvad kolmandasse rühma | 2p |
| Leitud mitu protsenti moodustavad kolmanda rühma õpilased kogu õpilastest | 1p |
| | 7p |

Ainult õige vastuse eest anda 2p

4.

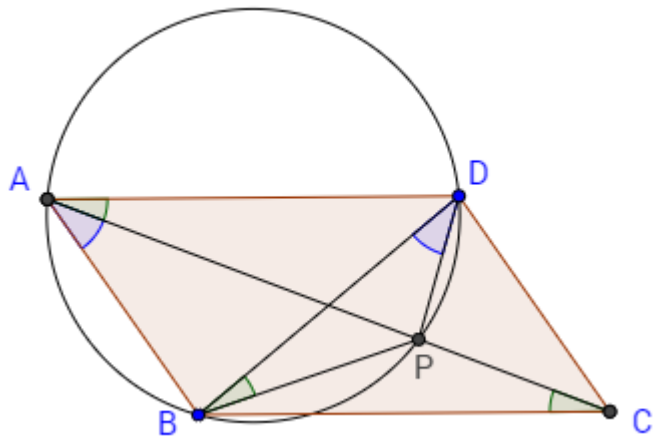
Lahendus:

Märkame, et nurgad $\angle BDP$ ja $\angle BAP$ on samale kaarele toetuvad piirdenurgad, seega $\angle BDP = \angle BAP$.

Analoogiliselt saame $\angle DBP = \angle DAP$.

Kuna ABCD on rööpkülik ehk küljed AD ja BC on paralleelsed, siis kehtib ka võrdus $\angle DAP = \angle ACB$ ehk $\angle DBP = \angle ACB$.

Sellega oleme saanud, et kolmnurkadel ABC ja BPD on kaks paari võrdseid nurki, ehk tegemist on sarnaste kolmnurkadega.



Hindamine:

Näidatud, et $\angle BDP = \angle BAP$:

2p

Näidatud, et $\angle DBP = \angle DAP$:

2p

Märgatud, et $\angle DAP = \angle ACB$ ja järeldatud sellest, et $\angle DBP = \angle ACB$

2p

Järeldatud eelnevast, et kolmnurgad ABC ja BPD on sarnased:

1p

7p

5. Vastus: Maria

Nummerdame malelaua vertikaalselt ja horisontaalselt nii, et ruut, kust alustatakse mängu on koordinaatidega (1; 1) ja viimane ruut (kuhu peab kuningas jõudma) on koordinaatidega (2017; 2017).

Märkame, et nii algruudu kui ka lõppruudu koordinaadid on paaritud arvud.

Näitame, et sõltumata Liisi käigust Maria saab alati käia nii, et kuningas jõuab ruutu, mille mõlemad koordinaadid on paaritud:

Oletame, et kuningas on ruudus koordinaatidega $(2k+1; 2n+1)$, siis Liisil on kolm käigu võimalust:

Ülesse, siis kuningas jõuab ruutu koordinaatidega $(2k+1; 2n+2)$

Paremale, siis kuningas jõuab ruutu koordinaatidega $(2k+2; 2n+1)$

ülesse-paremale, siis kuningas jõuab ruutu koordinaatidega $(2k+2; 2n+2)$

Maria oma käiguga saab alati muuta mõlemad koordinaadid paarituks korrates Liisi käigu.

ülesse $(2k+1; 2n+3)$

paremale $(2k+3; 2n+1)$

ülesse-paremale $(2k+3; 2n+3)$

Kuna mäng algab ruudus koordinaatidega (1;1) siis Marial on alati võimalik käia nii, et kuningas peale tema käigu seisaks ruudus paaritu koordinaatidega. Samas see tähendab, et peale Liisi käigu kuningas jääb seisma ruudus, kus vähemalt üks koordinaat on paarisarv. Kuna lõpp-punkt on paaritu koordinaadiga ja Marial on alati võimalik Liisi käiku korrata, siis tema ka võidab kasutades seda strateegiat sõltumata Liisi käikudest.

Hindamine:

On mainitud, et algus- ja lõpp-punkti mõlemad koordinaadid on paaritud 1p

On tõestatud, et Maria saab alati käia nii, et peale tema käiku kuningas asub ruudus paaritu koordinaatidega 4p

On selgitatud, et Maria saab alati korrata Liisi käiku 1p

On järeldatud, et kui Maria kordab Liisi käike, siis ta võidab 1p

7p

Ainult õige vastus - 0p